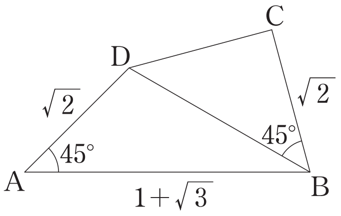
PART3 四角形の面積

要点 ① 四角形の面積

四角形の面積を，対角線によって分割された 2 つの三角形の面積の和として求める。

例 右図のような四角形 ABCD の面積 S を求める。



△ABD において，余弦定理より

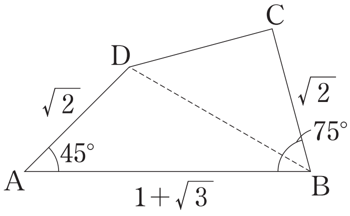
$$BD^2=(\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\cos 45^\circ$$
$$=2+4+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=4$$

BD＞0 より BD＝2

よって S＝△ABD＋△BCD

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\sin 45^\circ+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+1=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

例 右図のような四角形 ABCD の面積 S を求める。



△ABD において

余弦定理より BD＝2

正弦定理より $\dfrac{2}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\angle ABD}$

$$\sin\angle ABD=\sqrt{2}\cdot\frac{\sin 45^\circ}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$\angle ABD<135^\circ$ より $\angle ABD=30^\circ$

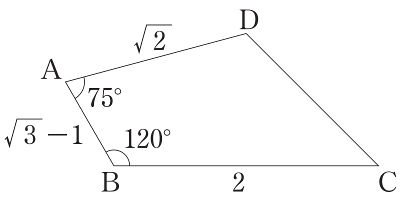
よって $\angle DBC=75^\circ-30^\circ=45^\circ$

したがって S＝△ABD＋△BCD＝$\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

分割されたそれぞれの三角形の面積を求めるために，どの辺の長さや角の大きさが必要かを考え，正弦定理や余弦定理などを用いて三角形の辺の長さや角の大きさを求める。

[MEMO]

3 $AB=\sqrt{3}-1$，$BC=2$，$DA=\sqrt{2}$，$\angle A=75°$，$\angle B=120°$ である四角形 ABCD の面積 S を求めよ。



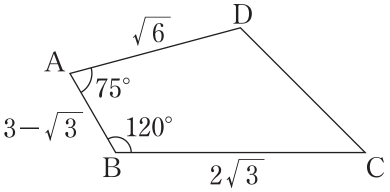
Point Pickup

四角形の面積

対角線によって分割された 2 つの三角形の面積の和として求める。正弦定理や余弦定理などを用いてそれぞれの三角形の辺の長さや角の大きさを求める。

第14講　PART3 確認問題

1　AB＝$3-\sqrt{3}$，　BC＝$2\sqrt{3}$，　DA＝$\sqrt{6}$，　∠A＝75°，
∠B＝120° である。この四角形 ABCD の面積 S を求める。



△ABC で余弦定理より，対角線 AC の長さを求めると，

AC＝ ア $\sqrt{\boxed{イ}}$

△ABC で正弦定理により，

∠BAC＝ ウエ °

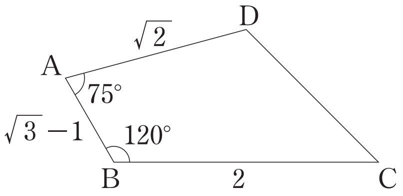
また，∠DAC＝ オカ °

よって，四角形 ABCD の面積 S は，

$S=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$

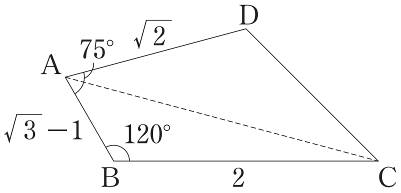
PART3 四角形の面積

3 $AB=\sqrt{3}-1$，$BC=2$，$DA=\sqrt{2}$，$\angle A=75^\circ$，
$\angle B=120^\circ$ である四角形 ABCD の面積 S を求めよ。



[解答]

△ABC で余弦定理より



$$AC^2=(\sqrt{3}-1)^2+2^2-2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot2\cdot\cos120^\circ$$

$$=4-2\sqrt{3}+4-4(\sqrt{3}-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=6$$

$AC>0$ より $AC=\sqrt{6}$

正弦定理より $\dfrac{\sqrt{6}}{\sin120^\circ}=\dfrac{2}{\sin\angle BAC}$

$$\sin\angle BAC=2\cdot\frac{\sin120^\circ}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\angle BAC<60^\circ$ より $\angle BAC=45^\circ$

よって $\angle DAC=75^\circ-45^\circ=30^\circ$

したがって $S=\triangle ABC+\triangle DAC$

$$=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot2\cdot\sin120^\circ+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sin30^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{2}$$

第14講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：2，ウエ：45，オカ：30，キ：9，
ク：2

[解説]

△ABC で余弦定理より，[A]

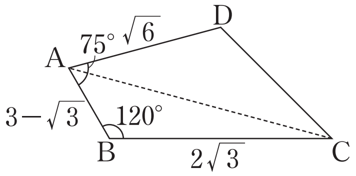
$$AC^2 = (3-\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2\cdot(3-\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}\cos 120^\circ$$

$$= 12-6\sqrt{3}+12-4\sqrt{3}(3-\sqrt{3})\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 18$$

[A]　△ABC に着目して，余弦定理を利用して AC の長さを求める。

AC＞0 より，

$$AC = \mathbf{3\sqrt{2}}$$



△ABC で正弦定理より，[B]

[B]　△ABC は 2 辺がわかっているので，正弦定理を利用する。

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sin 120^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin\angle BAC}$$

$$\sin\angle BAC = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sin 120^\circ}{3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

∠BAC＜75° より，

$$\angle BAC = \mathbf{45^\circ}$$

よって，∠DAC＝75°−45°＝**30°**

したがって，

$$S = \triangle ABC + \triangle DAC$$ [C]

[C]　2 つの三角形の和として四角形の面積を求める。

$$= \frac{1}{2}\cdot(3-\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}\sin 120^\circ$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{2}\sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(3-\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \mathbf{\frac{9}{2}}$$